



UNIT 2. THE INTEGERS

1.- THE INTEGERS

1.1.- The negative numbers

Hay situaciones que no pueden ser expresadas con los números naturales, porque cuando expresamos una cierta cantidad necesitamos indicar la dirección en relación al origen. En estos casos se usan los números negativos, por ejemplo:

•Positions:	The height of Mount Everest is 8700m.	+8700 m
	A submarine which is sailing 700 m below sea level	- 700 m
	The second floor of a subterranean garage	- 2
•Money:	He has saved 5000eur in his bank account	+5000 eur
	He is 400 eur overdrawn	- 400 eur
•Temperatures:	The average summer temperature here is 35 C	+35 C
	The temperature in Siberia has risen 25 C below zero.	-25 C

Los números negativos se escriben con un signo menos delante. El número 0 no es ni positivo ni negativo. Si un número se escribe sin signo entonces es positivo.

1.2.- The integers set

The integer set is formed by the natural numbers, zero and negative numbers. It is represented by \mathbb{Z} .

In Spanish: El conjunto de los números enteros está formado por los números naturales, el cero y los números negativos. Se representa por \mathbb{Z} .

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

The integer set doesn't have a beginning or an ending and it has infinite elements. In Spanish: Los números enteros no tienen principio ni final

Solve the following exercises:

1A.- Write with an integer the following informations:

- a) The plane is flying at 9500 m high
- b) The minimum temperature yesterday was 3 degrees below zero
- c) The garage is on the second cellar



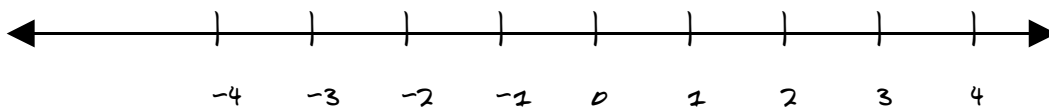
d) The diver is swimming 20 metres deep

e) Sergio owes 25 euros

2.- ORDER OF THE INTEGERS

2.1.- Graphical representation

Los enteros pueden representarse sobre una línea recta. El número 0 es más o menos el centro de la línea y después, dividiremos la línea en segmentos iguales que representarán los números: positivos a la derecha del cero y negativos a la izquierda del cero.



Solve the following exercises:

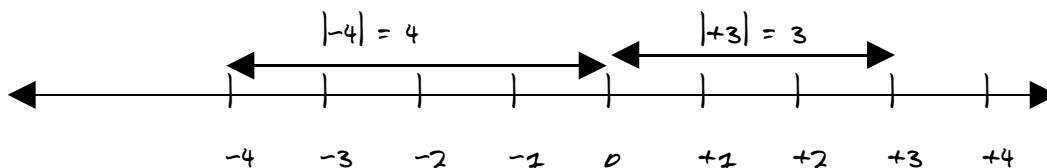
2A.- Represent on a line the following numbers: -1, +3, +7, -5

2.1.- Absolute value and opposite.-

The absolute value of an integer is the number without the sign. It is represented as $|a|$ and it is called **absolute value of a**. In Spanish: El valor absoluto de un entero es el número pero sin signo. Se representa por $|a|$ y se lee **valor absoluto de a**

$$|+5| = 5 \qquad |-3| = 3 \qquad |-7| = 7 \qquad |+2| = 2$$

Geométricamente representa la distancia del número al cero:



The opposite of an integer is another integer with the same absolute value but different sign. El opuesto de un entero es otro entero con el mismo valor absoluto pero con diferente signo.

$$Op(+3) = -3 \qquad Op(-5) = +5 \qquad Op(-7) = +7 \qquad Op(+2) = -2$$

Solve the following exercises:

3A.- Work out the absolute value of these numbers

a) $|-9|$ b) $|+5|$ c) $|-3|$ d) $|+7|$ e) $|0|$

4A.- Find out the number that has an absolute value of 7 and is between -8 and -6



5A.- Work out the opposite of the following numbers:

a) $O_p(-4) =$

b) $O_p(+8) =$

c) $O_p(15) =$

d) $O_p(-301) =$

6A.- Write down the absolute value of the opposite of these numbers:

a) $|O_p(+4)| =$

b) $|O_p(-11)| =$

c) $|O_p(-200)| =$

d) $|O_p(+1001)| =$

7A.- Write down the opposite of the absolute value of these numbers:

a) $O_p|+4| =$

b) $O_p|-11| =$

c) $O_p|-200| =$

d) $O_p|+1001| =$

2.3.- Order in the integer set

Para ordenar números enteros tendremos en cuenta que cuanto más a la derecha esté el entero mayor será el número, por tanto:

● Between a positive number and a negative number, the positive number is always larger: Entre un número positivo y otro negativo el positivo es siempre mayor.

$$5 > -2$$

$$1 > -3$$

$$2 > -100$$

● Between two positive numbers, one with the largest absolute value: Entre dos números positivos el mayor es el de mayor valor absoluto

$$7 > 2$$

$$10 > 4$$

$$300 > 200$$

● Between two negative numbers, the larger number is the one with the smallest absolute value: Entre dos números negativos el mayor es el de menor valor absoluto

$$-7 < -2$$

$$-10 < -4$$

$$-300 < -200$$

Solve the following exercises:

8A.- Write down the "less than" sign (<) or the "greater than" sign (>) where corresponds

a) $+4 \underline{\hspace{1cm}} +1$

b) $-1 \underline{\hspace{1cm}} -6$

c) $0 \underline{\hspace{1cm}} +3$

d) $-8 \underline{\hspace{1cm}} +2$

e) $-2 \underline{\hspace{1cm}} 0$

9A.- Sort these negative numbers, greatest first: -5, -1, -2, -25

10A.- Sort these numbers from low to high: -4, +7, -6, -3, +5

3.- THE ADDITION AND SUBTRACTION OF INTEGERS

3.1.- The addition of integers

Podemos tener dos casos:

a) Si los dos números tienen el mismo signo. En este caso sumaremos los valores absolutos y dejaremos el mismo signo:

$$5 + 3 = 8$$

$$2 + 7 = 9$$



$$^{-}3 + ^{-}5 = ^{-}8$$

$$^{-}2 + ^{-}7 = ^{-}9$$

b) Si ambos números tienen distinto signo. En este caso restaremos los valores absolutos y dejaremos el signo del mayor:

$$7 + ^{-}2 = 5$$

$$2 + ^{-}3 = ^{-}1$$

$$^{-}5 + 7 = 2$$

$$^{-}3 + 1 = ^{-}2$$

Solve the following exercises:

11A.- Work out the following sums with integers:

a) $10 + 5 + ^{-}3 =$

b) $9 + ^{-}3 + ^{-}12 =$

12A.- Write down the missing numbers:

a) $6 + \underline{\quad} = 9$

b) $\underline{\quad} + ^{-}4 = 1$

c) $^{-}2 + \underline{\quad} = ^{-}3$

d) $3 + \underline{\quad} = ^{-}4$

13A.- Work out the following sums:

a) $^{-}13 + 8 + 7 + ^{-}1 =$

b) $6 + ^{-}4 + ^{-}3 + 8 =$

3.3.- The subtraction of integers

To subtract two integers we will add the first number to the opposite of the second number. In Spanish: Para restar dos números enteros añadiremos al primer número el opuesto del segundo

$$5 - 2 = 5 + ^{-}2 = 3$$

$$7 - ^{-}3 = 7 + 3 = 10$$

$$^{-}2 - ^{-}7 = ^{-}2 + 7 = 5$$

$$^{-}8 - 3 = ^{-}8 + ^{-}3 = ^{-}11$$

Solve the following exercises:

14A.- Work out the following sums with integers:

a) $^{-}2 - 8 =$

b) $6 - 7 =$

c) $^{-}19 + ^{-}20 =$

d) $^{-}10 - ^{-}4 =$

e) $3 - ^{-}9 =$

f) $16 - ^{-}2 =$

15A.- Write down the missing numbers:

a) $5 - ^{-}6 = ^{-}5 + \underline{\quad} = \underline{\quad}$

b) $3 - ^{-}8 = 3 + \underline{\quad} = \underline{\quad}$

c) $^{-}12 - \underline{\quad} = ^{-}12 + 6 = \underline{\quad}$



3.4.- Combined additions.-

Si tenemos que operar con más de dos números enteros primero convertiremos las restas en sumas, después sumaremos los números positivos por un lado, los negativos por otro y por último el positivo con el negativo que hemos obtenido:

$$7 - 2 + 1 - 3 - 7 + 2 = 7 + 2 + 1 + 3 + 7 + 2 = 16 + 6 = 10$$

Solve the following exercises:

16A.- Work out the following combined additions:

a) $2 - 8 + 3 - 7 + 2 - 4 =$

b) $6 - 7 + 3 - 5 + 7 - 8 =$

3.5.- Working with brackets. The Spanish way.-

En España en lugar de usar signos pequeños para indicar negativos, se usa un signo grande similar al de las operaciones y un paréntesis para separar la operación del paréntesis, pero la dinámica es la misma, una vez convertidas las restas en sumas eliminamos el signo de sumar quedando sólo los signos de los números:

$$7 - 2 + 1 - 3 - 7 + 2 = 7 - (-2) + (-1) - 3 - (-7) + (-2) = 7 + 2 - 1 - 3 + 7 - 2 = 16 - 6 = 10$$

Solve the following exercises:

17A.- Work out the following combined additions:

a) $(-3) + (-7) - (+3) - (-3) + (-5) =$

b) $-5 + (-3) - (-2) + (-5) - (-3) =$

c) $-(-5) + (-2) - (-3) + (-7) - (-2) =$

d) $4 - (+4) - (-4) + (-3) - (-2) - (-7) =$

4.- MULTIPLICATION AND DIVISION

4.1.-The multiplication of integers

To multiply two or more integers we have to multiply the signs and then the absolute value of the numbers. In Spanish: Para multiplicar dos o más enteros tenemos que multiplicar los signos y después el valor absoluto de los números.

Para multiplicar los signos aplicamos la regla de los signos:



$$(+)\times(+)=(+)$$

$$(-)\times(+)=(-)$$

$$(+)\times(-)=(-)$$

$$(-)\times(-)=(+)$$

For example:

$$2 \times 5 = 10;$$

$$-3 \times 5 = 15$$

$$-3 \times 7 \times -1 \times 2 = 42$$

4.2.-The division of integers

To divide two or more integers we have to divide the signs and then the absolute value of the numbers. In Spanish: Para dividir dos o más enteros tenemos que dividir los signos y después el valor absoluto de los números.

Para dividir los signos aplicamos la regla de los signos otra vez:

$$(+)\cdot(+)=(+)$$

$$(-)\cdot(+)=(-)$$

$$(+)\cdot(-)=(-)$$

$$(-)\cdot(-)=(+)$$

For example: $10 : 5 = 2;$

$$-15 : -3 = 5$$

$$7 : -1 = -7$$

$$-10 : -2 = 5$$

Los enteros no cumplen la ley de composición interna para la división ya que a veces la división de dos números enteros no es otro número entero. For example: $+10 : -3$

Solve the following exercises:

18A.- Work out the following multiplications and divisions:

a) $(-2) \times (-7) =$

b) $(-15) : (-3) =$

c) $(-20) \times (+1) =$

d) $(-25) : (+5) =$

e) $(+3) \times (-10) =$

f) $(-10) : (-1) =$

19A.- Work out the missing numbers:

a) $(-2) \times \underline{\hspace{1cm}} = -22$

b) $(-15) : \underline{\hspace{1cm}} = 15$

c) $\underline{\hspace{1cm}} \times (-5) = 30$

d) $\underline{\hspace{1cm}} : (+5) = -10$

e) $(+6) \times \underline{\hspace{1cm}} = -18$

f) $(-70) : \underline{\hspace{1cm}} = -7$

5.- COMBINED OPERATIONS

5.1.- Distributive property

Igual que los números naturales, los enteros satisfacen la propiedad distributiva esto es, la adición de dos números enteros multiplicado por otro número entero es igual a la suma del número multiplicado por cada sumando del paréntesis.

For example: $-2 \times (3 - 5) = -2 \times 3 - 2 \times (-5) = -6 + 10 = +4.$



So, if you have to multiply an integer by an addition in the brackets, there are two ways of doing this:

First, the brackets and then the multiplication

$$-5 \times (-3 + 5) = -5 \times 2 = -10$$

or applying the distributive property

$$-5 \times (-3 + 5) = 15 - 25 = -10$$

Solve the following exercises:

20A.- Find out the outcome by two different ways:

a) $3 \times (-7 - 10) =$

b) $(-5) \times (12 - 4) =$

21A.- Find out the outcome using the distributive property:

a) $(-9) \times (8 - 9) =$

b) $2 \times (-10 + 3) =$

c) $4 \times (-5 + 9 - 6) =$

d) $(-9 + 7 - 2) \times (-8) =$

22A.- Complete the following exercises:

a) $(-5) \times (9 - 4) = -5 \times \underline{\quad} = -25$

b) $\underline{\quad} \times (5 - 7) = -10 + \underline{\quad} = \underline{\quad}$

c) $9 \times 8 = 9 \times (5 + \underline{\quad}) = \underline{\quad} + 27$

d) $3 \times (-6 + \underline{\quad}) = 3 \times \underline{\quad} + 3 \times (-9) = \underline{\quad}$

5.2.- Extract a common factor

En la suma $8 \times (-3) + 8 \times 5$ hay un factor que se repite en los dos sumandos que es el 8. Si aplicamos la propiedad distributiva pero al revés podríamos escribir:

$$8 \times (-3) + 8 \times 5 = 8 \times (-3 + 5)$$

$$36 - 24 + 12 = 4 \times 9 + 4 \times (-6) + 4 \times 3 = 4 \times (9 - 6 + 3)$$

Este paso de suma a producto se llama **sacar factor común**. In English it is called **Extract the common factor**.

Solve the following exercises:

23A.- Extract a common factor of these operations and work out the outcome



a) $(-5) \times 7 + (-5) \times (-12) =$

b) $(-2) \times 7 + (-2) \times (-3) =$

c) $5 \times 9 + 5 \times (-11) =$

d) $(-9) \times (-12) + (-9) \times 13 =$

e) $7 \times 2 + 7 \times (-21) =$

f) $(-2) \times 7 + (-2) \times (-3) =$

5.3.- Order of the operations

When expressions have more than one operation, we have to follow rules for the order of operations. These are the same rules as for natural numbers:

Rule 1: First perform any calculations inside the brackets.

Rule 2: Do powers and roots

Rule 3: Next perform all multiplications and divisions, working from left to right.

Rule 4: Lastly, perform all additions.

Ahora en el paso final de la suma ya no importa el orden pero una buena idea es sumar todos los positivos, todos los negativos y después sumar al final el negativo y el positivo.

Solved Examples:

11.- Using the order of operations, work out $(-3) - 6 \cdot (-5 + 4) : (-3) + 7$

Step 1: $(-3) - 6 \cdot (-5 + 4) : (-3) + 7 = (-3) - 6 \cdot (-1) : (-3) + 7$ Brackets

Step 2: $(-3) - 6 \cdot (-1) : (-3) + 7 = (-3) + 6 : (-3) + 7$ Multiplication

Step 3: $(-3) + 6 : (-3) + 7 = -3 - 2 + 7$ Division

Step 4: $-3 - 2 + 7 = -5 + 7 = 2$ Addition

Solve the following exercises

24A.- Find out the outcome:

a) $32 + (-12) : 6 =$

b) $(-8) \times 9 - 15 \times (-3) =$

c) $(-4) \times 10 : 2 + 14 : (-7) =$

d) $27 : (-3) \times 2 - (-4) =$

e) $(-18) : 6 + 5 \times (-10) =$

f) $18 : 9 + 5 - [(-15) \times 3 + 12 \times 4] =$



g) $(-6) \times [4 - (-2)] + [-8 + (-3) \times 2] =$

h) $(-35) : (5 + 2) + (-4) \times 9 - (7 - 2 \times 5) =$

i) $[(3 - 4) + (-2)] \times 4 + 9 : (-3) \times 6 =$

j) $\{ [(-12) - (-3)] \times 8 \} + 24 : \{ [(-2) + (-6)] : 2 \} =$